

Esercizi di Informatica Teorica

Concetti di Base

a cura di

Luca Cabibbo e Walter Didimo

Sommario

- principio di induzione finita (o matematica)
- cardinalità di insiemi
- pigeonhole principle
- espressioni regolari

notazioni sul livello degli esercizi: (*) facile, (**) non difficile
(***) media complessità, (****) difficile, (*****) quasi impossibile

Principio di induzione finita

P.I.F. Sia $P(n)$ una proposizione definita sui naturali;
se esiste un naturale n_0 tale che:

- $P(n_0)$ è vera (passo base)
- $P(n)$ vera implica $P(n + 1)$ vera $\forall n \geq n_0$ (passo induttivo)

allora P è vera $\forall n \geq n_0$.

Esercizio 1(*) riformulare il principio nel caso particolare di $n_0 = 0$

Principio di induzione finita

Esercizio 2(**): dimostrare che per ogni insieme finito A risulta $|P(A)| = 2^{|A|}$ (dove $P(A)$ è l'insieme delle parti di A).

Soluzione

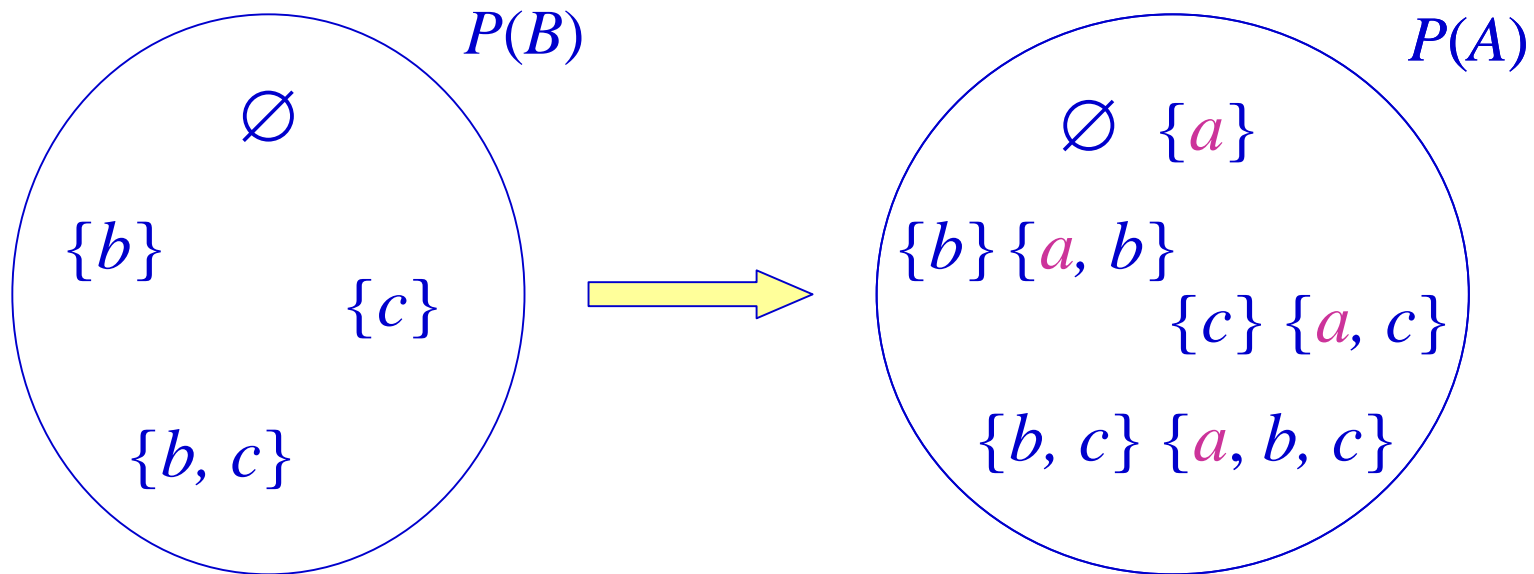
procediamo per induzione sulla cardinalità di A :

- se A è l'insieme vuoto allora $|P(A)| = 1 = 2^0$ (ok)
- **supponiamo vera** la proposizione per $n \geq 0$, e sia $|A| = n + 1$; sia a un qualunque elemento di A e sia $B = A - \{a\}$; per B vale la proposizione ed inoltre $P(A)$ è formato da tutti gli insiemi in $P(B)$ più gli stessi insiemi a ciascuno dei quali viene aggiunto l'elemento a (dimostrare formalmente);
allora: $|P(A)| = 2 |P(B)| = 2 \cdot 2^{|A|-1} = 2^{|A|}$ (ok)

Principio di induzione finita

Esempio: sia $A = \{a, b, c\}$; allora $|P(A)| = 2^3 = 8$.

$$B = \{b, c\}$$



Principio di induzione finita

Esercizio 3(****): dimostrare che $n^4 - 4n^2$ è divisibile per 3, per ogni naturale n (*suggerimento*: sfruttare la relazione di equivalenza modulo 3 ed applicare l'induzione due volte)

Soluzione

procediamo per induzione su n :

- se $n = 0$ è ovvio, perché zero è divisibile per 3 (ok)
- **supponiamo vera** la proposizione per $n \geq 0$; per $n + 1$ risulta:
$$(n+1)^4 - 4(n+1)^2 = (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - 4(n^2 + 2n + 1) =$$
$$= (n^4 - 4n^2) + 6n^2 - 3 + 4n^3 - 4n \equiv_3 4n^3 - 4n \equiv_3 n^3 - n$$

dimostriamo quindi che $n^3 - n$ è divisibile per 3;

Principio di induzione finita

procediamo ancora per induzione su n

- per $n = 0$ è ovvio, perché 0 è divisibile per 3 (ok)
- **supponiamo vera** la proposizione per $n \geq 0$; risulta
 $(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$
 $= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$ che è divisibile per 3 (ok)

quindi anche $(n+1)^4 - 4(n+1)^2$ è divisibile per 3 (ok)

Esercizio 4(*) dimostrare che la somma dei naturali da 1 ad n è pari ad $(n+1)n / 2$

Esercizio 5(**) dimostrare che dati due insiemi finiti e non vuoti A e B esistono esattamente $|B|^{|A|}$ funzioni da A a B
(*suggerimento*: procedere per induzione su $|A|$)

Principio di induzione finita

Esercizio 6 (**) trovare l'errore nella dimostrazione della seguente proposizione:

proposizione: in un branco di cavalli tutti i cavalli hanno lo stesso colore

dimostrazione induttiva:

- *per un branco con 1 solo cavallo la proposizione è ovvia (ok)*
- *supponiamo vero l'enunciato per un qualunque branco con $n \geq 1$ cavalli e sia dato un branco di $n+1$ cavalli; se togliamo un cavallo dal branco, per l'ipotesi induttiva, rimangono n cavalli con lo stesso colore, diciamo col1; se togliamo un secondo cavallo dal branco e rimettiamo quello di prima, abbiamo ancora n cavalli dello stesso colore, diciamo col2. Poiché infine nel branco sono sempre rimasti fissi $n - 1$ cavalli allora deve essere $col1 = col2$, e quindi gli $n+1$ cavalli hanno tutti lo stesso colore.*

Cardinalità di insiemi

Richiami:

- due insiemi sono equinumerosi (o equipotenti) se esiste una biiezione tra loro
- un insieme finito con n elementi è equinumeroso a $\{0, \dots, n-1\}$
- un insieme è numerabile se è equinumeroso ad \mathbf{N} (cardinalità \aleph_0)
- un insieme è contabile se è finito oppure numerabile
- un insieme è continuo se è equinumeroso ad \mathbf{R} (cardinalità 2^{\aleph_0})

Esercizio 7(*) mostrare un esempio per ciascuna delle classi sopra elencate

Esercizio 8(**) dimostrare che l'insieme S di tutte le possibili sequenze infinite di naturali da 0 a 9 è non numerabile

Cardinalità di insiemi

Soluzione applichiamo il ragionamento diagonale di Cantor: supponiamo per assurdo che S sia numerabile; allora possiamo contare tutte le sequenze di S :

$$\begin{array}{l} S_0 \quad a_{00} \ a_{01} \ \dots \ a_{0i} \ \dots \\ S_1 \quad a_{10} \ a_{11} \ \dots \ a_{1i} \ \dots \\ \dots \\ S_j \quad a_{j0} \ a_{j1} \ \dots \ a_{ji} \ \dots \\ \dots \end{array}$$

consideriamo la seguente sequenza: $s = (a_{00} + 1) (a_{11} + 1) \dots (a_{ii} + 1) \dots$, dove $+$ è inteso modulo 10; s è diversa da ciascuna s_k , che è assurdo

Pigeonhole Principle (PHP)

PHP Dati due insiemi finiti e non vuoti A e B , con $|A| > |B|$, non esistono funzioni totali iniettive da A a B

Esercizio 9 (**) sia G un grafo con n vertici; dimostrare che ogni cammino di G di lunghezza maggiore di n contiene almeno un ciclo.

Soluzione

sia (v_1, v_2, \dots, v_m) un cammino di G tale che $m > n$; sia f la funzione totale che associa ad ogni vertice del cammino un vertice di G ; per il PHP f non può essere iniettiva; sia dunque k il minimo numero per cui $f(v_i) = f(v_{i+k})$ ($1 \leq i < i+k \leq m$); allora $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+k})$ è un ciclo di G

Pigeonhole Principle (PHP)

Esercizio 10 (****) dimostrare che, in un qualunque gruppo di persone, esistono almeno due persone che hanno lo stesso numero di amici nel gruppo

note:

1. un gruppo è composto da almeno due persone
2. la relazione di amicizia è riflessiva e simmetrica

(*suggerimento*: dimostrare per assurdo che la funzione “numero di amici” non può essere iniettiva)

Pigeonhole Principle (PHP)

Soluzione sia A un gruppo di persone e sia $|A| = n > 1$; consideriamo la funzione f che associa ad ogni elemento (totalità) di A il suo numero di amici in A ; per la riflessione ogni persona è amica almeno di se stessa e quindi: $f: A \rightarrow \{1, \dots, n\}$; supponiamo per assurdo che f sia iniettiva;

- caso 1: se non $\exists x \in A : f(x) = 1 \Rightarrow f: A \rightarrow \{2, \dots, n\}$, che è assurdo per il PHP;

- caso 2: se $\exists x \in A : f(x) = 1 \Rightarrow \forall y \in A \setminus \{x\}$ risulta

- $f(y) \geq 2$ per l'ipotesi (assurda) di iniettività di f

- $f(y) \leq n-1$ per la simmetria (nessuno è amico di x)

quindi f ristretta ad $A \setminus \{x\}$ dovrebbe essere totale ed iniettiva sul codominio $\{2, \dots, n-1\}$, che è assurdo per il PHP

Espressioni regolari

Definizioni di espressioni regolari e linguaggi associati su un alfabeto Σ

- \emptyset $L(\emptyset) = \emptyset = \Lambda$
- a , se $a \in \Sigma$ $L(a) = \{a\}$
- $(s + t)$, se $s, t \in L$ $L(s + t) = L(s) \cup L(t)$
- $(s \cdot t)$, se $s, t \in L$ $L(s \cdot t) = L(s) \cdot L(t)$
- s^* , se $s \in L$ $L(s^*) = L(s)^*$

tutti gli operatori sono associativi

relazioni di precedenza: $*$ $>$ \cdot $>$ $+$

nota: il \cdot viene spesso omesso, cioè $(a \cdot b)$ si scrive anche (ab)

Espressioni regolari

Esercizio 11 (**) dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- $\emptyset^* = \emptyset$
- $baa \in L(a^*b^*a^*b^*)$
- $abcd \in L((a(cd)^*b)^*)$
- $a^*b^* \cap b^*a^* = a^* + b^*$
- $(ab)^* \cap (cd)^* = \emptyset$
- $(abb + a)^*a = a(bba + a)^*$
- $(a+b)^* = (a^*b^*)^*$

Esercizio 12 (*) dire quali sono i linguaggi descritti dalle seguenti espressioni regolari su $\Sigma = \{0, 1\}$

- $1(0+1)^*$
- $(0+1)^* 1 (0+1)^*$

Espressioni regolari

Esercizio 13 (***) scrivere le espressioni regolari corrispondenti ai seguenti linguaggi su $\Sigma = \{0, 1\}$

- tutte le sequenze alternate di 0 e 1 che iniziano e finiscono per 1 o che iniziano e finiscono per 0
- tutte le sequenze con un numero pari di 0

Soluzione

- $(10)^*1 + (01)^*0$
- $((01^*01^*) + (1^*01^*0))^* + 1^*$

Espressioni regolari

Esercizio 14 (**) scrivere l'espressione regolare che descrive il complemento dei seguenti linguaggi su $\Sigma = \{0, 1\}$

- $1(0+1)^*$
- $0^* + 1^*$

Soluzione

- $(0(0+1)^*)^*$
- $((1+0)^*0(1+0)^*1(1+0)^*) + ((1+0)^*1(1+0)^*0(1+0)^*)$

Espressioni regolari

Esercizio 15 (**) semplificare le seguenti espressioni regolari

- $(a^*b + b^*cb)^*$
- $((a^*b^*)^* (b^*a^*)^*)^*$

Esercizio 16 (***) determinare le espressioni regolari per i seguenti linguaggi

- i numeri naturali in notazione binaria
- i numeri binari su 4 bit
- i numeri naturali in base 10
- i numeri naturali pari
- i numeri pari in base 3

Espressioni regolari

Soluzione

- i numeri naturali in base 2 (notazione binaria)

$$0 + 1(0 + 1)^*$$

- i numeri binari su 4 bit

$$(0+1) (0+1) (0+1) (0+1)$$

- i numeri naturali in base 10

$$0 + (1+2+3+4+5+6+7+8+9)(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)^*$$

- i numeri naturali pari

$$(0+2+4+6+8) + (1+2+..+9)(0+1+..+9)^*(0+2+4+6+8)$$

- i numeri naturali pari in base 3 su qualsiasi numero di cifre

$$(0 + 2 + 1(0+2)^*1)^*$$

in una qualunque sequenza di cifre
deve esserci un numero pari di 1